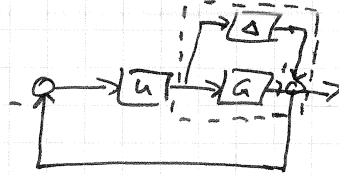
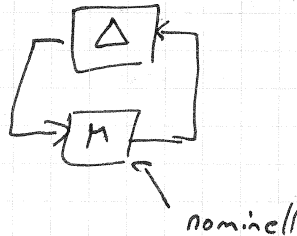


Unstrukturierte Unsicherheit



$$|\Delta(j\omega)| < \ell(\omega) \quad \forall \omega$$



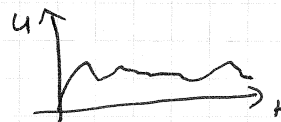
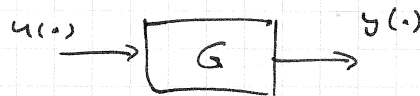
$$|\Delta(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega$$

H ist stabil = der nominelle Kreis ist stabil

Einschub: H_∞ -Norm ("Hardy ~~Norm~~")

Normen gibt es für: $x(t) \in \mathbb{R}^n$

(Konstanten,
Signale,
Systeme,
Matrizen)



u ist eine ^{Signal} Funktion

$$y(j\omega) = \boxed{G(j\omega)} \cdot u(j\omega)$$

System an einer Frequenz ausgewertet (im BISO-Fall nur eine komplexe Zahl)

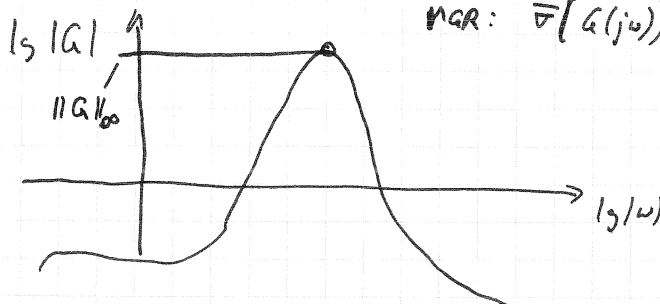
Def:

H_∞ -Norm einer Übertragungsfunktion $G(\cdot)$

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega} |G(j\omega)|$$

$$\text{MGR: } \overline{\sigma}(G(j\omega))$$

(essentiell)
ess sup := wesentliches
Supremum



Bem.: max. Verstärkung für sinus-förmige Eingänge.

Klasse von Signalen: L_2 -Signale

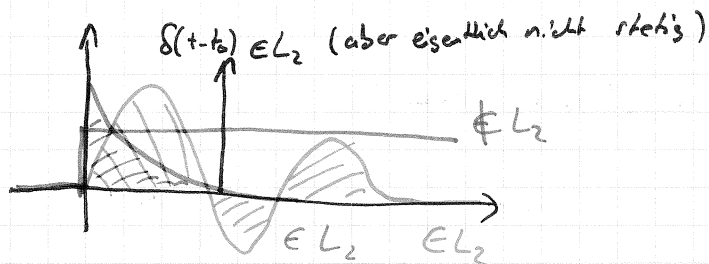
$$\|u\|_2 := \sqrt{\int_0^\infty u^T(t) u(t) dt}$$

$$\text{SISO: } u^T u = u^2$$

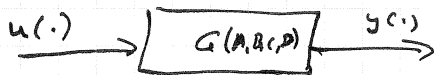
"Energie" des Signals

L_2 -Signale: Signale mit beschränkter L_2 -Norm (Energie)

Bemerkung: $\|u\|_2 < \infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$
(i.e. stabile Signale)



asy. stabiles $G: L_2 \rightarrow L_2$



$$\|G\|_{L_2\text{-ind}} := \sup_{0 \leq \|u(\cdot)\|_2 < \infty} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} \quad \forall u \in L_2$$

$\frac{y}{u}$ = Verstärkung

max. Verstärkung des Systems im L_2 -Sinn

Satz:

$$\|G\|_\infty = \|G\|_{L_2\text{-ind}}$$

$G(j\omega)$

LTI

Satz:Anm.: M, Δ stabil, $\|\Delta\|_\infty < 1$

geschl. Kreis rob. asy. stabil

 $\Leftrightarrow$

$$\|M\| \leq 1$$

"small gain Theorem"

Beweis (roter Pfeil)

direkt aus Small gain Theorem

(grüner Pfeil)

$$\|M\|_\infty > 1 \Rightarrow \exists \Delta \text{ s.d. geschl. Kreis instabil}$$

Def.: $\Delta_0 \in \mathbb{C} = \frac{1}{M(j\omega_0)} \rightarrow \exists \omega_0 : |M(j\omega_0)| > 1$

$$\Rightarrow |\Delta_0| = \frac{1}{|M|} < 1$$

$$\Delta(s) = \alpha \cdot \frac{s - \beta}{s + \beta}$$

mit $\alpha = \pm |\Delta_0|, \beta = j\omega_0 \frac{\alpha - \Delta_0}{\alpha + \Delta_0}$

Lemma: Δ ist proper, reell-rational

$$\Delta(j\omega_0) = \Delta_0$$

 Δ ist stabilBeweis (Lemma):

$$\begin{aligned} \Delta(j\omega_0) &= \alpha \cdot \frac{j\omega_0 - \beta \frac{\alpha - \Delta_0}{\alpha + \Delta_0}}{j\omega_0 + \beta \frac{\alpha - \Delta_0}{\alpha + \Delta_0}} = \alpha \cdot \frac{\alpha + \Delta_0 - (\alpha - \Delta_0)}{\alpha + \Delta_0 + (\alpha - \Delta_0)} \\ &= \alpha \cdot \frac{2\Delta_0}{2\alpha} = \Delta_0 \end{aligned}$$

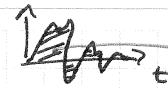
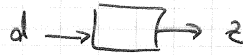
für diesen $\Delta(s)$ gilt

$$1 - \underbrace{M(j\omega_0)}_{\frac{1}{\Delta_0}} \underbrace{\Delta(j\omega_0)}_{\Delta_0} = 0 \Rightarrow \text{geschl. Kreis ist instabil} \quad \square$$



Zeit Bereich

$$\|G\|_{\infty}$$



Energie ist endlich

Alle Eingangssignale (as. stabil) werdenbetrachtet ($\in L_2$)

$$\|G\|_{L_2\text{-ind}} := \sup_{0 \leq \|d\|_2 \leq 1} \frac{\|z\|_2}{\|d\|_2}$$

 $\| \cdot \|_{\infty}$ = größtmögliche Verstärkung

Satz: $\|G\|_{\infty} = \|G\|_{L_2\text{-ind}}$

Frequenzbereich

~~Zeitbereich~~

$$L_2\text{-Norm: } \int_0^{\infty} \|z(t)\|^2 dt$$

von z

Bew. Stab.: $d=0 \leftarrow$

$$\dot{V} = x^T \underbrace{(A^T P + P A)}_{Q < 0} x$$

"Stabilität von linearen Systemen hängt nicht vom Eingangssignal ab"

(1,1) der LMI < 0 :

$$Q + \underbrace{C^T \frac{1}{\gamma} I C}_{\geq 0} < 0$$

$$\Rightarrow Q < 0 \rightarrow A \text{ asy. stabil}$$

$$\frac{K_0}{s+1}$$

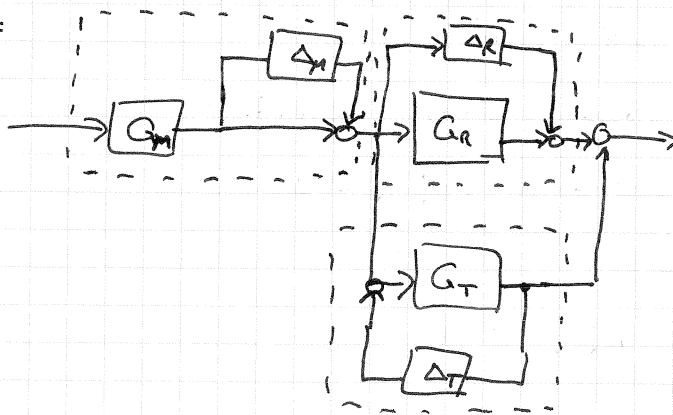
$$1 + \frac{1}{s}$$

$$\frac{K_0 + T_i}{s}$$

"Es kommt stark drauf an welchen Unsicherheitstyp ^{man} wählt (z.B. Additiv, Multiplikativ)"

Strukturierte Unsicherheiten

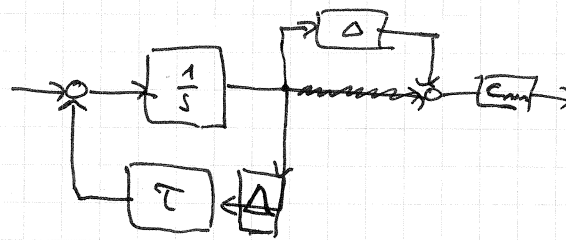
Bsp. 1:



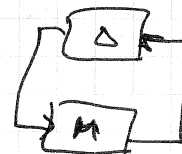
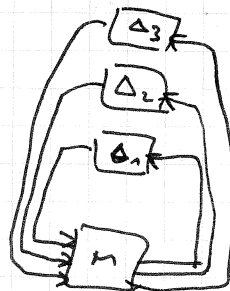
M... Motor
R... Roboter
T... Tisch

Bsp. 2:

$$G(s) = \frac{C}{\tau s + 1} \quad 2 \leq C \leq 3, \quad 10 \leq \tau \leq 100$$



Bsp.



$$\Delta = \text{diag} \{ \Delta_1, \dots, \Delta_m \}$$

Strukturiert

Klasse von Unsicherheiten:

$$\mathcal{B}_\Delta^\nu = \{ \Delta : \Delta = \text{diag} \{ \Delta_1, \dots, \Delta_m \} \text{ und } \|\Delta_i\|_\infty \leq \nu \}$$

John Doyle '78

Strukturierter Singulärer Wert μ

$$\text{Def: } \mu(M, \mathcal{B}_\Delta^\nu) = \left\{ \min_{\Delta \in \mathcal{B}_\Delta^\nu} \|\Delta\|_\infty : \begin{array}{l} \text{geschl.} \\ \text{Kreis} \\ \text{instabil} \end{array} \right\}^{-1}$$

μ ist die Inverse der Größe der kleinsten zulässigen Unsicherheit, die den Kreis destabilisiert.

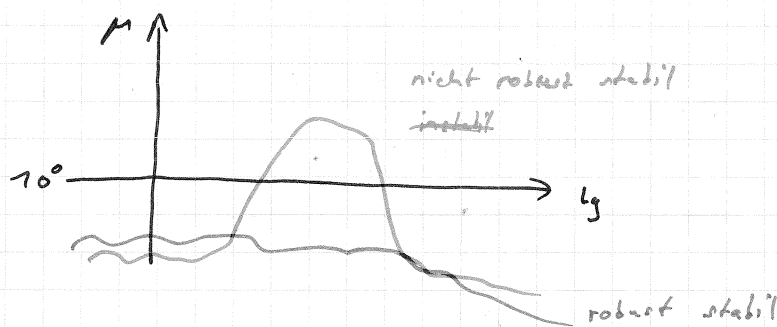
Satz: Ann.: M sei stabil
 Δ sei stabil

geschl. Kreis ist robust stabil gegenüber
strukturierten Unsicherheiten $B_{\Delta}^T \Rightarrow \Delta$

$\Leftrightarrow$

$$\mu(M, B_{\Delta}^T) < 1$$

Beweis trivial



Berechnung von μ : über obere und untere Schranke

$$\underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}$$

↑
Immer die obere Schranke nehmen

IV Einführung in die nichtlineare Regelungstheorie

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}$$

$$y = h(x, u)$$

Eingang affine (nichtlineare) Systeme:

$$\dot{x} = \cancel{f(x)} - g(x)u$$

$$y = h(x)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) - g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

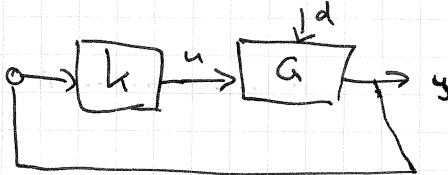
Wie sieht das aus wenn man als Eingang einen Integrator rein gibt

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ h(0) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x_s \equiv 0 \quad \text{Ruhelage bei } u_s \equiv 0$$

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

Differenzordnung =

Ordnung $N(s)$ - Ordnung $Z(s)$



durch "Rel. grad" gibt die Anzahl an Integrationen an die durch die man durch muss bis man am Ausgang ankommt"

IV.1 Der rel. Grad

Sprungfähigkeit (lin. Systeme)

$$y(0^+) \neq 0$$

$$y(0^+) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left\{ s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} \right\}$$

$$y(0^+) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left\{ s \cdot \left(s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x) \cdot u & x \in \mathbb{R}^n \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

$$f(0) = 0$$

$$h(0) = 0$$

Im Linearen:

$G(s) \Rightarrow$ Differenzordnung

$= \text{Anzahl Pole} - \text{\# Null}$

Fortgesetzte Ableitungen der Ausgangsfunktion

$$y(t) = h(x)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \cdot \dot{x} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) + \underbrace{\frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x)}_{L_g h(x)} \cdot u$$

Notation: $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Ableitung einer skalaren Fkt. h entlang einer Zustandsvektorfunktion (Vektorfeld)

$$(\nabla) \quad L_g L_f h(x) = \frac{\partial (L_f h(x))}{\partial x} g(x)$$

$$L_f^k h(x) = \frac{\partial^{k-1} L_f h(x)}{\partial x} \quad \dots \quad \begin{aligned} & \text{(unvollständig)} \\ & L_f^0 h(x) = h(x) \end{aligned}$$

2 Fälle

a) $L_g h(x) \neq 0 \Rightarrow y = f(u)$

b) $L_g h(x) = 0$

1) $\ddot{y} = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x) \cdot u$

$\vdots$
 $\ddot{\ddot{y}} = L_f^3 h(x) + L_g L_f^2 h(x) \cdot u$

Def: Der relative Grad r eines Systems S am Arbeitspunkt $x_s = 0$ ist die natürliche Zahl für die

(i) $L_g L_f^k h(x) = 0$ für die $k=0, \dots, r-2$

(ii) $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$ in einer Umgebung von $x_s = 0$ gilt

Bem:

- r ist diejenige zeitliche Ableitung von y , die erstmals von u abhängen

- Spezieller Fall Linearer Systeme:

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} \triangleq (A, B, C, D)$$

$$y = c^T x$$

$$\dot{y} = c^T A x + \underbrace{c^T B u}_{\text{Markov-Parameter}}$$

$$\ddot{y} = c^T A^2 x + \underbrace{c^T A B u}_{\text{Markov-Parameter}}$$

$\vdots$

- $r = \text{function}(f, g, h) \Rightarrow$ E/A-Konzept

- r koordinatenunabhängig

- Sonderfälle:
 - $r=0$ $y = h(x, u)$

• $r = \frac{1}{2} n$

- relativer Grad ist eine Aussage bzgl. des Arbeitspunktes

$$x_s = 0$$

Bsp.: $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1^3 + x_1 x_2 \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_1 \end{bmatrix}}_{g(x)} u$

$y = x_1$
 $\underbrace{\hspace{1cm}}_{h(x)}$

$k=0$:

$$L_g h(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_1 \end{bmatrix} = 0$$

$k=1$:

$$L_f h(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1^3 + x_1 x_2 \end{bmatrix} = x_2$$

$$L_g L_f h(x) \Big|_{x=0} = \frac{\partial x_2}{\partial x} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_1 \end{bmatrix} \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_1 \end{bmatrix} \Big|_{x=0} = 1+x_1 = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{r=2}}$$

Falls $\exists t$ s.d. (i) und $L_g L_f^{t-1} h(0) = 0$, aber $L_g L_f^{t-1} h(x) \neq 0$

in Umgebung von $x_f = 0$

$\rightarrow$ nicht wohldefinierter rel. Grad

Bsp. 1

$$\dot{x}_1 = x_1^3 + x_2 u$$

$$\dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2$$

$$y = x_1$$

$$L_g h(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2$$

$$\Rightarrow r=1 \quad (\text{nicht wohldefiniert})$$

Linear um x_s : $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$, $y = x_1$

Hier: Nichtlineares System steuerbar,

lineares System nicht steuerbar

! rel. Grad des lin. System $\neq$

— " — des nichtli. —

Bem.:

Im MIMO-Fall $y \in \mathbb{R}^p$ und $u \in \mathbb{R}^q$ ist rel. Grad ein Vektor mit p Komponenten

$$t = [r_1, \dots, r_p]^T \dots \text{vektorieller rel. Grad}$$

IV.2 Nichtlineare Koordinatentransformationen

$$z = Tx$$

$$z = \phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} \quad \phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Annahme

- (i) $\phi(0) = 0$
- (ii) $\phi(x)$ invertierbar, d.h.
 $\exists \phi^{-1}(z)$ s.d. $\phi(\phi^{-1}(z)) = z$
- (iii) $\phi(x)$ und $\phi^{-1}(z) \in C^\infty$

Falls (ii) & (iii) für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: globaler Diffeomorphismus

— " ————— in einer Umgebung um $x_s = 0$, gilt lokaler — " —

Satz: $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein globaler Diffeo, wenn

- a) $\phi(x) \in C^\infty$
- b) $\frac{\partial \phi(x)}{\partial x}$ (Jacobi-Matrix von ϕ) muss an allen Stellen $x \in \mathbb{R}^n$
- c) ϕ radial unbeschränkt, d.h. $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|\phi(x)\| \rightarrow \infty$

Satz: $\text{rk}\left(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x}\right)_{x=0} = n \Rightarrow \text{lokaler Diffeomorphismus um } x_s = 0$

Bsp.: $z = \phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 1 - e^{x_2} \end{bmatrix}$

$\phi(0) = 0$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -e^{x_2} \end{bmatrix} \bigg|_{x=0} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Rang = 2

$$\Rightarrow \text{rg} \left(\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} \right) = 2$$

$\Rightarrow$ lok. Diffeo

$\Rightarrow$ kein globaler Diffeo

IV.3 Brylief - Isidori Normalform

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \phi(x) = \left\{ \begin{array}{l} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) \\ \phi_{r+1}(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} r \\ n-r \end{array}$$

Annahme: rel. Grad r

$y = z_1$

$$(\dot{y}) = \dot{z}_1 = \underbrace{\frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x)}_{L_f h(x)} + \underbrace{\frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x) \cdot u}_{=0} = z_2$$

$$(\ddot{y}) = \dot{z}_2 = L_f^2 h(x) + \underbrace{L_g L_f h(x) \cdot u}_{=0} = z_3$$

$\vdots$

$$\dot{z}_r = L_f^r h(x) + \underbrace{L_g L_f^{r-1} h(x) \cdot u}_{\neq 0} = z$$

Bem.: $\phi_1, \dots, \phi_r$

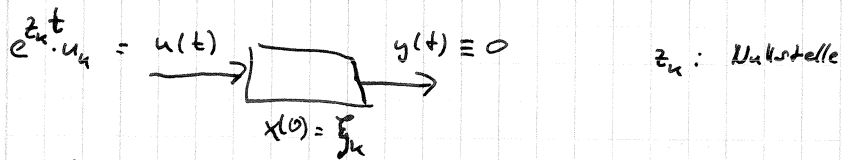
sind lin. unabhängig

$\phi_{r+1}, \dots, \phi_n$ so wählen, dass ϕ lokal Diffeo.

Ist immer möglich



minimalphasig: Nullstellen auf der linken Halbedene



Def.:

Eine komplexe Frequenz z_k heißt Übertragungsnullstelle eines Systems, wenn $\exists u_k, x(0) = \xi$ s.d. für $t \geq 0$

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + \underbrace{B \cdot u_k \cdot e^{z_k t}}_{u(t)}$$

$$(2) \quad y(t) = Cx(t) + \cancel{d} \cdot u_k \cdot e^{z_k t} \quad \text{und } y(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq 0$$

Für $y \equiv 0$ muss gelten

$$C^T x(t) + d u_k e^{z_k t} = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = p \cdot e^{z_k t}$$

aus $x_k(0) = \xi_k$ folgt

$$\xi_k = p$$

In (1):

$$(3) \quad z_k \xi_k \cdot e^{z_k t} = A \xi_k \cdot e^{z_k t} + b u_k \cdot e^{z_k t}$$

In (2):

$$(4) \quad 0 = C^T \xi_k \cdot e^{z_k t} + d \cdot u_k \cdot e^{z_k t}$$

aus (3), (4):

$$\begin{bmatrix} z_k I - A & -b \\ -C^T & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$Ax = 0$ hat Lsg
 wenn A singular

Bestimmung von z_k :

$$(\Leftrightarrow) \det \begin{bmatrix} z_k I - A & -b \\ -c^T & -d \end{bmatrix} = 0$$

Bestimmung von u_k, ξ_k aus (5).

Verallgemeinertes Eigenwertproblem:

$$\begin{cases} A \cdot s_i = \mu_i \cdot M \cdot s_i \\ (\mu_i M - A) s_i = 0 \end{cases}$$

notwendig:

$$M = \begin{bmatrix} I_{nm} & 0 \\ 0 & 0_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \text{singular}$$

$\text{eig}(A, M)$
 $\text{tzero}(sys)$

Bsp.:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c^T = [1 \quad 1], \quad d = 0$$

$$\left[G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b = \frac{s+1}{s(s+2)} \right]$$

$$\left| \begin{array}{cc|c|c} z_k & -1 & 1 & 0 \\ 0 & z_k+2 & -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right| = -1 - z_k = 0$$

$z_k = -1$

Berechnung von ξ_k und u_k :

$$-\xi_1 - \xi_2 = 0, \quad \xi_2 - u = 0, \quad -\xi_1 - \xi_2 = 0$$

$$\Rightarrow \xi_1 = -\xi_2, \quad u = \xi_2$$

Satz:

Annahme: Pole $\neq NS$

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = c^T (sI - A)^{-1} b + d$$

z_k sei Lsg von:

$$\begin{bmatrix} z_k I - A & -b \\ -c^T & d \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{dann gilt } G(z_k) = Z(z_k) = 0$$

Lemma: (Schurkomplement)

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B)$$

Beweis:

$$\underbrace{\det \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}}_{=1} \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B + D \end{bmatrix}$$

$$= \det(A) \det(D - CA^{-1}B) \quad \square$$

Beweis (Satz):

$$\begin{bmatrix} z_k I - A & -b \\ -c^T & -d \end{bmatrix} = \underbrace{\det(z_k I - A)}_{\neq 0, \text{ ug. Pol} \neq \text{NS}} \underbrace{\det[-d - (-c^T(z_k I - A)^{-1}b)]}_{\text{skalar}}$$

$$= -\det(z_k I - A) \cdot \underbrace{(c^T(z_k I - A)^{-1}b + d)}_{\text{GCN}} = 0 \quad \square$$

Bemerkung:

- Gilt auch für MIMO-Systeme
- Pole können mit Feedback verschieden, NS nicht!

Satz:

Die Ü-NS eines Systems (A, b, c^T, d) verändern sich nicht unter konstanten Ausgangs- oder Zustandsfeedback

Bew:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned}$$

Ü-NS

$$\det \begin{bmatrix} z_k I - A & -b \\ -c^T & \textcircled{0} \end{bmatrix} = 0$$

Feedback: $u = -k y + \underline{v} = -k c^T x + \underline{v}$

(Nullstellen brauchen einen Eingang)

Geschl. Kreis:

$$\dot{x} = (A - bkc^T)x + bu \quad \xrightarrow{U=0} \det \begin{bmatrix} z_k I - A + bkc^T & -b \\ -c^T & 0 \end{bmatrix}$$
$$y = c^T x$$

$$\det \begin{bmatrix} z_k I - A + bkc^T & -b \\ -c^T & 0 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} z_k I - A & -b \\ -c^T & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\det \begin{bmatrix} I & 0 \\ -kc^T & I \end{bmatrix}}_{=1}$$

□

IV. 5 Nulldynamik

System in BINF

$$y = z_1$$

$$\dot{y} = \dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = z_3$$

⋮

$$\dot{z}_r = q_r(z) + b(z)u$$

$$\dot{z}_{r+1} = q_{r+1}(z)$$

⋮

$$\dot{z}_n = q_n(z)$$

$$y(t) \equiv 0 \Rightarrow z_1 \equiv 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \dot{z}_r \equiv 0 = q_r(z) + b(z)u$$

$$\Rightarrow u = - \frac{q_r(z)}{b(z)} \quad \text{Feedback}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{r+1} = q_{r+1}(z) \\ \vdots \\ \dot{z}_n = q_n(z) \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } z_1(0) = z_2(0) = \dots = z_r(0) = 0$$

Nulldynamik eines nichtlinearen Systems.

minimalphasig $\neq$ Inverse-Response Behaviour $\hookrightarrow$ Nulldynamik stabil $\hookrightarrow$ Nulldynamik instabilBsp.:

$$y = x_1 - 2x_2$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - 2x_2 + 4$$

BINF:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 & -2x_2 \\ \ell_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow y = z_1$$

$$\dot{z}_1 = x_1 - 2(-x_1^3 - 2x_2 + 4)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{\partial \ell_2}{\partial x_1} \cdot x_2 + \frac{\partial \ell_2}{\partial x_2} \cdot [-x_1^3 - 2x_2 + 4]$$

$$\Rightarrow \ell_2 = f(x_1)$$

$$\text{Wahl: } \ell_2 = x_1$$

$$\Phi^{-1}: \left. \begin{array}{l} x_1 = 2x_2 + z_1 \\ x_2 = z_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = z_2 \\ x_2 = \frac{x_1 - z_1}{2} = \frac{z_2 - z_1}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow y = z_1$$

$$\dot{z}_1 = \frac{z_2 - z_1}{2} + 2z_2^3 + 4 \frac{z_2 - z_1}{2} - 2 \cdot 4$$

$$\dot{z}_2 = \frac{z_2 - z_1}{2}$$

Nulldynamik:

$$\boxed{\dot{z}_2 = \frac{z_2}{2}}$$

 $\hookrightarrow$ instabilwg. Anfangsbedingung für Nulldynamik
 $z_2 = 0, \dots$

Bem.: Berechnung der Stabilitäts-eigenschaften der Nulldynamik in Praxis über Linearisierung.
(wegen Kommutativitäts-Bedingung)

Satz: Die Nulldynamik ist invariant unter Zustandsfeedback

Bew.:

$$y = z_1$$

$$z_1 = z_2$$

$$\dot{z}_r = a(z) + b(z)u \quad u = \alpha(x) + v$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) \\ \dot{z}_n &= q_n(z) \end{aligned}$$

Nulldynamik

$$z_1 = \dots = z_r = 0$$

α beeinflusst interne Dynamik nicht. $\square$

Fall: Nur nicht - eingangsnormalisierte BINF bekannt:

$$y = z_1$$

$$\dot{z} = z_2$$

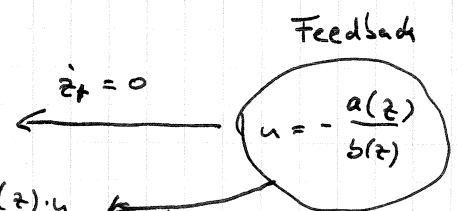
:

$$\dot{z}_r = a(z) + b(z)u$$

$$\dot{z}_{r+1} = q_{r+1}(z) + p_{r+1}(z)u$$

:

$$\dot{z}_n = q_n(z) + p_n(z)u$$



↳ Nur Gleichungen von z

IV. Reglerentwurf für nichtlineare Systeme

- dyn. Ausgangsfeedback
- Zustandsrückführungen

$$u = \alpha(x) + \beta(x) \cdot v$$

IV.1 lin Regler für nichtlineare Systeme

lokale Stabilisierung: $\begin{matrix} \vdots \\ \dot{z} \\ \vdots \end{matrix} = a^T z + \underbrace{(\text{h.o.t.})}_{-4x} + b \overset{-4x}{u} + (\text{h.o.t.}(z))u$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0}, g(0) \text{ stabilisierbar}$$

$$\begin{array}{lcl} \dot{x} = +x^3 + x \cdot u & \leadsto & \dot{x} = 0 \\ y = x & & y = x \end{array}$$

→ nicht stab. bar

P-Regler für nichtlineare Systeme

Satz: Für jedes nichtlineare System mit

- rel. Grad 1
- global exp. stabile Nulldyn. existiert eine Rückführung $u = ky$

mit $|k|$ hinreichend groß, s.d. der geschlossene Kreis global asy. stabil ist.

(high-gain-feedback)

adaptive high-gain Stabilisierung

$$u(t) = k(t) \cdot y(t)$$

$$k(t) = \gamma \cdot \|y(t)\|^2, \quad \gamma > 0$$

V.2 Reglerentwurf mittels E/A-Linearisierung

Geg.:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x)$$

Ziel: Entwerfe einen Regler $u = \alpha(x) + \beta(x)v$, so dass das Übertragungsverhalten $v \rightarrow y$ linear ist.

mit BINF:

1. Transformation auf BINF

2. Wähle Feedback

$$u = -\frac{a(z)}{b(z)} + \frac{\bar{u}}{b(z)}$$

$$\Rightarrow \dot{z}_r = -\underline{y^{(r)}} = \bar{u}$$

Annahmen:

$$1. \quad b(z) = L_g L_f^{r-1} h(x) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \neq 0$$

 $\rightarrow$ wohldefinierter rel. Grad

2. Nulldynamik

$$\dot{z}_{r+1} = q_{r+1}(z)$$

 $\vdots$

$$\dot{z}_n = q_n(z)$$

asympt. stabil

Stabilisierung mittels lin. Zustandsrückführung und neuen

Eingang v :

$$\bar{u} = -\sum_{k=1}^r \beta_{k-1} z_k + v = -\sum_{k=1}^r \beta_{k-1} L_f^{k-1} h(x) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} + v$$

so dass $s^r + \beta_{r-1}s^{r-1} + \dots + \beta_0$ Hurwitz ist.

Satz: Wenn S

1. einen wohldefinierten rel. Grad besitzt
 2. minimalphasig ist (asymptotisch stab. Nulldynamik)
- dann wird das E/A-Verhalten, durch die stationäre Rückführung

$$u = - \frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} - \frac{\sum_{k=1}^r \beta_{k-1} L_f^{k-1} h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} + \frac{v}{L_g L_f^{r-1} h(x)}$$

exakt linearisiert. Das E/A-Verhalten wird durch

$$G(s) = \frac{1}{s^r + \beta_{r-1} s^{r-1} + \dots + \beta_0}$$

beschrieben.

Bsp:

$$\boxed{\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2} \quad \text{Nulldynamik } (x_2 = 0)$$

$$\dot{x}_2 = e^{x_1 x_2} x_2 + \sin(x_2) + (1+x_1^2)u$$

$$y = x_2$$

→ rel. Grad $r=1$

Nulldynamik mit $y=x_2=0$ führt auf $\dot{x}_1 = -x_1^3$ und ist global asymptotisch stabil.

E/A-Linearisierendes Feedback

$$u = \underbrace{\frac{1}{1+x_1^2}}_{L_g h(x)} \left(\underbrace{-e^{x_1 x_2} - \sin(x_2)}_{-L_f h(x)} - \underbrace{x_2}_{-\beta_0 h(x)} + v \right)$$

führt auf das E/A-Verhalten

$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$

Bem.: - Für E/A-Linearisierung ist Transformation auf BINF nicht notwendig

- MIMO-Fall kann analog betrachtet werden

- Die E/A ist nicht robust bzgl. Modellierungsfehlern in $a(z)$ und $b(z)$.

Exakte Zustandslinearisierung

Idee ist $\dot{x} = f(x) + g(x)u$

in $\dot{z} = Az + Bu$

zu überführen. Hierbei muss ein "fiktiver" Ausgang $y = \gamma(x)$ gefunden werden, so dass der rel. Grad $r=n$. Solch ein Ausgang wird "Linearisierender" oder "flacher" Ausgang genannt.

Bem.: - Flacher Ausgang oft schwer zu finden

- Für Existenz muss die sogenannte Produktivitätsbed. erfüllt sein

- Flacher Ausgang kann mittels Lösen von PDGLs berechnet werden.

IV.2.1 Asymptotische Folgeregelung

Regelungsaufgabe:

nicht stabilisieren, sondern asymptotische

Sollwertfolge, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{\text{ref}}(t)$, $y_{\text{ref}} \in C^\infty$

Genauer gesagt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \quad e(t) = y(t) - y_{\text{ref}}(t)$$

Idee: Stabilisierung des Regelfehlers

$$y = z_1$$

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\vdots$$

$$z_r = y^{(r)} = y_{\text{ref}}^{(r)} - \underbrace{\sum_{k=1}^r \beta_{k-1} (y^{(k-1)} - y_{\text{ref}}^{(k-1)})}_{e^{(k-1)}}$$

$$u = \frac{1}{L_f L_f^{r-1} h(x)} \left[-L_f^r h(x) + y_{\text{ref}}^{(r)} - \sum_{k=1}^r \beta_{k-1} (L_f^{k-1} h(x) - y_{\text{ref}}^{(k-1)}) \right]$$

Regelfehler-Dynamik ist beschrieben durch

$$e^{(r)} + \beta_{r-1} e^{(r-1)} + \dots + \beta_1 \dot{e} + \beta_0 e = 0$$

V.2.2 Störerkopplung

$$S': \quad \dot{x} = f(x) + g(x)u + p(x)d$$

$$y = h(x)$$

d ist Störung und wird als Eingang betrachtet. Zwei rel. Grade

- r bzgl. u

- r' bzgl. d

3 Fälle:

1. $r' > r$

$$y = z_1$$

$$\dot{y} = \dot{z}_1 = z_2$$

$$\vdots$$

$$y^{(r)} = \dot{z}_r = a(z) + b(z)u$$

$$" \quad \dot{z}_{r+1} = q_{r+1}(z, d)$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_n = q_n(z, d) \quad "$$

Übertragungsverhalten von $u \rightarrow y$ ist unabhängig von der Störung d , d.h. E/A-Linearisierung entkoppelt Störung.

2. $r' = r$

$$y = z_1$$

$$\vdots$$

$$y^{(r)} = \dot{z}_r = a(z) + b(z)u + c(z)d$$

$$\vdots$$

Störgrößenauflösung (^{nur} wenn d ^{bekannt} messbar) mit

$$u = \frac{1}{b(z)} \left[-a(z) - c(z)d + v + \sum_{i=1}^r \dots \right]$$

3. $r' < r$

~~keine~~ keine Störkopplung möglich

Bem.: Im 3. Fall ist höchste Vorsicht geboten